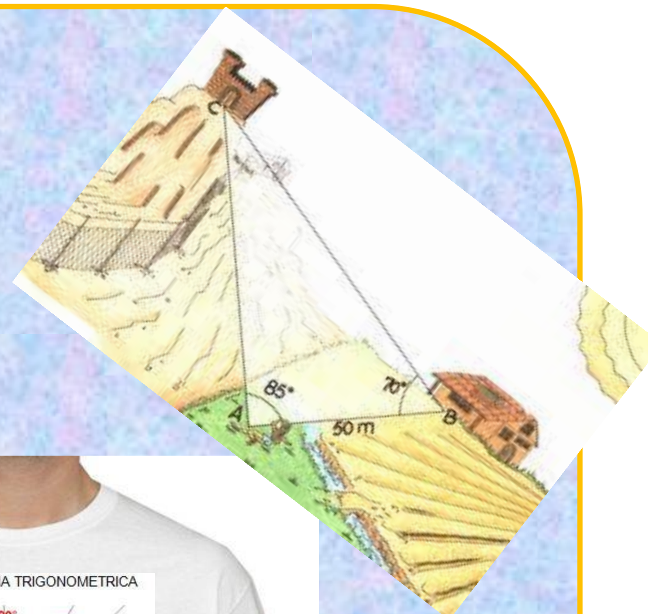
Elementos de trigonometría



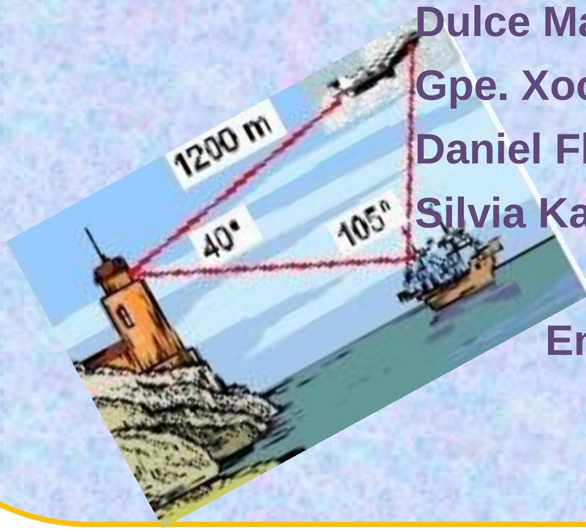
Autores:

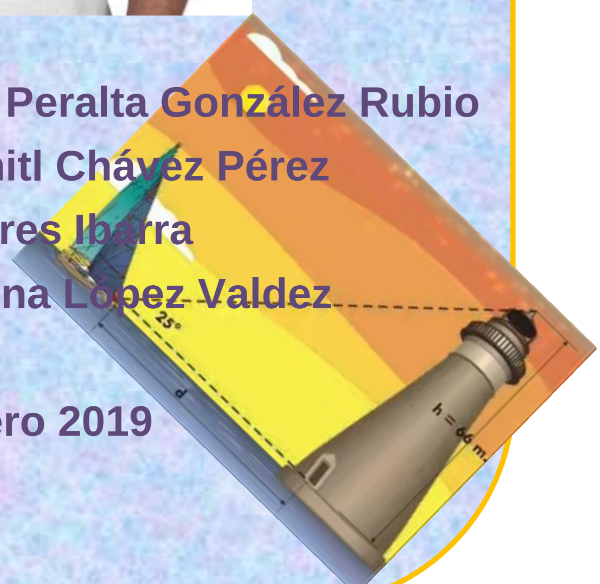
Dulce Ma. Peralta González Rubio

Gpe. Xochitl Chávez Pérez

Daniel Flores Ibarra

Silvia Karina López Valdez





Enero 2019

U1. Elementos de Trigonometría

Obstáculos en el aprendizaje

Elementos de trigonometría

Introducción

Nuestras discusiones entre docentes nos han llevado a reflexionar que los contenidos de la geometría euclidiana y la trigonometría no pueden separarse y sobre todo, que hay consideraciones sobre los procedimientos que van más allá de una mera relación de afinidad.

En la trigonometría, al igual que en la geometría hay cuatro aspectos que, pensamos son relevantes[1] y deben ser tomados en cuenta a la hora de enseñar, estos son:

1. Visualización, dibujo y construcción de figuras.
2. Estudio de aspectos espaciales del mundo físico.
3. Uso de algún medio para representar los conceptos matemáticos no visuales y sus relaciones.
4. Representación como un sistema matemático formal.

Es más, muchas de las cuestiones planteadas en problemas geométricos están basadas en conceptos trigonométricos básicos (triángulo, semejanza y longitud).

El planteamiento del Programa de Matemáticas III establece que el estudio de la trigonometría del triángulo rectángulo complementa el cálculo de distancias posibilita la medición indirecta y que además, en este semestre también, el manejo de las razones trigonométricas abonan al dominio algebraico que pretendemos logren los alumnos. Hay que mencionar que los estudiantes ya conocen el teorema de Pitágoras y su inverso, lo usan para hallar distancias gráficamente en planos coordenados y lo aplican para estimar distancias geográficas.

El propósito del curso con el estudio de la trigonometría es lograr que los aprendices la perciban como una herramienta de gran utilidad que combina aspectos del álgebra,

[1] Esteban, P., Ibañez, M.y Ortega, T. 1998. *Trigonometría*. Editorial Síntesis. Madrid. p 101

aritmética y geometría, asimismo, se pretende que apliquen la idea de semejanza y razones trigonométricas para la medición indirecta de distancias y resolver problemas prácticos.

Cabe señalar que el propio Plan de Estudios, menciona que estos conocimientos servirán a los estudiantes para facilitarles el abordaje de las unidades temáticas posteriores a esta en Matemáticas III, IV y en la materia de Cálculo Diferencial e Integral al trabajar con las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales.

Abordar conceptos geométricos desde diferentes contextos, en los que se encuentran el arte y la historia, permiten, además de amenizar las clases, mostrar a los estudiantes una visión más amplia de la matemática, en la que se ve, aparte del cálculo abstracto, una verdadera producción cultural en la que la humanidad hace uso de la matemática como un lenguaje para transmitir mensajes y como una herramienta para satisfacer necesidades[2].

La trigonometría, desde el punto de vista histórico, tiene su desarrollo inicial midiendo los cielos a través de la astronomía y su necesidad de calcular distancias inaccesibles, alturas de montañas, tablas de navegación, determinación del grado de los meridianos, cálculo de las longitudes geográficas de lugares en el globo terráqueo, etc., por lo que el nacimiento y desarrollo de la trigonometría ha estado casi siempre ligada a situaciones propias de las necesidades humanas[3].

Al presentar a la matemática solamente como un conjunto de resultados verdaderos sin referencia a sus raíces, es decir, a las ideas que fueron origen de sus conceptos y teorías, se pierde la concepción de ciencia como algo que surge de la necesidad de expresión, de una manera de pensar, de una filosofía, de una forma de ver el mundo. Mostrar a la matemática como una síntesis de resultados, como ya dijimos, impide verla como una ciencia en progreso constante, como una consecuencia que refleja la manera de pensar y actuar de la sociedad. Los alumnos requieren conocer los procesos para llegar a los conocimientos y resultados de las distintas ramas de las matemáticas.

---

[2] Crespo, C. "La Geometría en el arte: los vitrales en las catedrales góticas", en p. 562

[3] Torres, C. 2008. Enseñanza de la trigonometría asistida con calculadoras graficadoras, en *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. CLAME. Edit. Días de Santos. México. pp. 823 – 850.

Tomando en cuenta lo anterior, en el caso particular de la trigonometría, a través del avance de la humanidad es posible encontrar múltiples y variados ejemplos de distintos tipos de aplicaciones en que los conceptos trigonométricos y sus propiedades se hacen necesarios para estudiar las formas, fenómenos, el espacio y toda suerte de cosas que nos importan del mundo exterior e interior de nuestro cuerpo.

Sabemos que existen dos visiones históricas de la trigonometría, una teórica y una práctica que siempre están entrelazadas como un todo, así las trabajaron nuestros ancestros. Los hindúes fueron los primeros que hicieron un equivalente a la razón seno, los egipcios las utilizaron en la construcción de las pirámides, también se aplicaron en los trabajos astronómicos de Aristarco, Menelao y Ptolomeo, quienes hicieron la división del ángulo en 360º.

En su evolución, hallamos que los árabes sentaron las bases de lo que hoy se entiende como trigonometría moderna, esto es, las funciones trigonométricas; asimismo, dedujeron la ley de los senos y otras identidades trigonométricas a la vez que elaboraron tablas más precisas. En el desarrollo posterior de la trigonometría básica para avanzar en el conocimiento y construcción de las funciones trigonométricas está lo hecho por François Vieta, que estableció su uso en el análisis matemático y en la matemática aplicada.

Es importante el aprendizaje de la trigonometría básica ya que es el preámbulo para estudios técnicos y universitarios tales como las ingenierías civil, geológica, eléctrica, astronomía, física, química, computación, medicina... Estas ciencias abordan fenómenos naturales y sociales que son modelados con funciones sinusoidales, fenómenos cíclicos, tales como: cambios de temperatura a lo largo del día, iluminación solar, variaciones de los niveles de grandes ríos, cambios en los niveles de las mareas, ritmos de los latidos del corazón, modulación de la voz humana, apoyo a débiles visuales y ciegos; además, es importante la trigonometría en la resolución de problemas que se pueden modelar, como el estudio de las relaciones entre los ángulos y lados de un triángulo para aplicarlos en la solución de problemas de medición de la anchura de los ríos, inclinación o pendientes de montañas, autopistas y carreteras.

Cabe hacer notar como uno de los obstáculos para el aprendizaje de la trigonometría, el hecho de que se plantea su estudio en muchos planes y programas, obviando su utilidad e importancia y mencionándola únicamente como parte de la geometría, que se encarga de estudiar la relación de los ángulos con los lados de un triángulo, lo que resulta una presentación aburrida y sin sentido para el estudiante.

I. Identificación de los conceptos o aprendizajes clave

Para iniciar el estudio de la trigonometría básica es importante establecer primero, ideas fundamentales que ya se abordaron en Matemáticas II, por lo que aquí se retoma el conocimiento del triángulo y sus propiedades principalmente de un triángulo rectángulo vistos en el semestre anterior, para abordar problemas trigonometría, como, por ejemplo, determinar si dos o más figuras son semejantes y **usar la semejanza para hallar las medidas de ángulos desconocidos** donde se aplican **los conceptos claves de proporción, semejanza y partes correspondientes en figuras semejantes**, para continuar con otro tipo de problemas que involucren usar la **razón trigonométrica tangente** en un triángulo rectángulo para medir longitudes indirectamente, lo cual implica el uso de **ideas claves como, lado adyacente a un ángulo, , lado opuesto al ángulo y tangente de un ángulo**.

Tomando las ideas clave mencionadas, hacer que los estudiantes puedan hallar indirectamente la magnitud de distancias, recurriendo al uso de las **razones trigonométricas seno, tangente y coseno** de un ángulo y sus recíprocas: **cosecante, cotangente y secante**.

En otras aplicaciones de la trigonometría, está el de utilizar los conceptos de semejanza y proporcionalidad para analizar formas y figuras, en esta actividad es clave el **relacionar los conocimientos matemáticos** con situaciones de la vida cotidiana para, a través de su aplicación, **sintetizar las nuevas ideas**.

El concepto de proporción juega un papel importante para determinar si dos figuras son semejantes y calcular, en consecuencia, longitudes y ángulos desconocidos por lo que la idea clave de **lados correspondientes en figuras semejantes** debe trabajarse aquí.

Comprender y utilizar la trigonometría del triángulo rectángulo es fundamental, es decir, se trata de usar la razón trigonométrica tangente en un triángulo rectángulo para medir longitudes indirectamente, por lo que los elementos del triángulo**: cateto adyacente al ángulo, cateto opuesto al ángulo, tangente de un ángulo** se usan aquí.

Con todos estos elementos mencionados, el propósito es que los estudiantes comprendan y usen métodos de medición indirecta de distancias al aplicar los conceptos de **semejanza y razones trigonométricas** para **medir distancias indirectamente** y resolver problemas prácticos, lo cual da pie para continuar, por ejemplo, en la unidad 3, donde la trigonometría es una herramienta para calcular el ángulo entre rectas, la inclinación de la misma con respecto a la línea horizontal, por mencionar una de tantas situaciones en el mismo programa de matemáticas donde es requerida. Asimismo, los conocimientos de esta unidad son básicos para continuar en Matemáticas IV con el estudio de las funciones trigonométricas**.**

II. Identificación de puntos problemáticos

Errores más comunes en la comprensión y uso de la trigonometría

Pasaremos ahora a describir algunas de las dificultades de este tema, tanto para su aprendizaje como para su enseñanza. Las descripciones que hacemos aquí tienen como base nuestra experiencia en el aula a la hora de enseñar la *trigonometría*.

Dificultades en la comprensión de la trigonometría básica

La enseñanza de la trigonometría juega un papel importante en el plan de estudios del Colegio. Al llevar su enseñanza al aula, las actividades de los alumnos para abordar este conocimiento ha dado evidencia de las dificultades en su aprendizaje al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las relaciones trigonométricas.

Entenderemos aquí al término *obstáculo* como sinónimo de dificultad, y un *problema* lo manejaremos como una cuestión por resolver, a los *errores* los consideramos como violaciones a las normas previamente establecidas por convenciones universalmente acordadas entre la comunidad científica para el uso del lenguaje matemático.

Algunos de los obstáculos que mencionaremos, se relacionan con el uso inadecuado del lenguaje, lo cual repercute en errores de representación de las proposiciones matemáticas involucradas en la solución de problemas trigonométricos.

En términos generales, al hacer un análisis lingüístico de las respuestas de los estudiantes, observamos que los errores que se presentan en la solución de problemas de la Geometría Euclidiana y, en particular en la trigonometría, son de tres tipos:

- De representación de objetos y enunciados matemáticos.
- Deductivos.
- Axiomáticos o de aplicación de la teoría (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución.

Estos no son excluyentes entre sí, ya que un error de un tipo puede tener consecuencias en los otros dos.

Los conceptos fundamentales de la geometría euclidiana, ángulos y triángulos son los que se utilizan en trigonometría y existen dificultades al simbolizar términos como: recta, segmento, bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento, entre otros que también pueden ser considerados como términos complejos del español especializado, lo que se traduce en un dificultad ya que requieren varias condiciones para su representación gráfica y/o simbólica.

Entre otras dificultades observadas están:

1. Desconocimiento del triángulo, manejo deficiente de la nomenclatura de sus elementos, características y propiedades.
2. Errores de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica, por ejemplo cuando nos referimos al coseno de un ángulo, muchos alumnos sólo escriben la

palabra cos (v. g. cos = 2/3) sin anotar el símbolo que representa al ángulo, lo que muestra la incomprensión del concepto que dicen estar aplicando.

Hay alumnos, que al inicio del estudio de esta unidad, reconocen a la hipotenusa como el lado más largo del triángulo, sin importar si es o no rectángulo, con lo cual se aplican erróneamente las definiciones de las relaciones trigonométricas.

En el contexto de los triángulos y en especial del triángulo rectángulo, hemos observado deficiencias en cuanto al pensamiento proporcional, por ejemplo, cuando se les pide, construir un triángulo a partir de un cociente que representa una razón trigonométrica expresado en fracción, no hay gran problema pues la mayoría lo hace. Sin embargo cuando se les proporcionó un seno igual a 0.4, fueron pocos a los que se les ocurrió transformar la expresión en fracción y construyeron el triángulo correspondiente; otros necesitaron de una orientación. Sin embargo, lo que llamó la atención fue que ninguno consideró 0.4 como la relación 0.4 sobre 1.

En el contexto del triángulo rectángulo y con relación a la comprensión global de relación trigonométrica, en general, los alumnos la entienden como la razón entre dos lados del triángulo rectángulo pero no liga dicha razón con una relación proporcional, por lo que a final de cuentas el término trigonométrica no contribuye a darle sentido a dicha relación en su mente.

En lo que corresponde a la unidad de medida asignada a la relación trigonométrica pueden hablar de centímetros, grados, centímetros sobre grados o no asignarle unidades, pero sin explicar el porqué.

Si el cálculo de las razones seno y coseno de un ángulo están referidos dentro del triángulo rectángulo no hay gran dificultad para el estudiante, pero cuando se solicita dicho cálculo para un ángulo definido únicamente por dos segmentos de recta, la mayoría no lo puede realizar. Tienen necesidad de completar el dibujo para construir un triángulo y algunos, intentan usar la ley de senos, pero la aplican con errores.

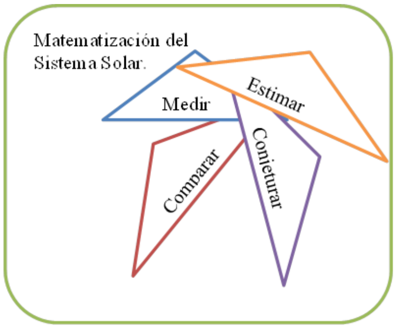
La mayoría de los estudiantes tiene dificultades en relación con la invariabilidad de las relaciones trigonométricas al rotar, reflejar, trasladar o ampliar los triángulos rectángulos.

III: Propuestas de solución

Para dar respuesta, en parte, a la problemática del aprendizaje y la enseñanza de esta unidad temática, hemos reflexionado y llegamos a lo siguiente: el discurso escolar tradicional va en el sentido de usar y aplicar definiciones matemáticas en contraste con lo que nosotros buscamos, esto es, que a partir de una noción o intuición geométrica y matemática, el alumno pueda ir construyendo los nuevos conceptos acerca de la trigonometría. Para abundar en esto, mientras que la solución de un problema macro no manipulable —como la medición de distancias en el sistema solar, por citar un ejemplo—obliga a escribir los resultados en formas que hoy conocemos como razones trigonométricas, *la escuela define el objeto que da solución a un problema de valor faltante* y que resulta en una medida en términos de distancia, alturas, longitudes, etc., *sin expresar la relación proporcional* que guarda con un objeto manipulable (el triángulo, por ejemplo), por lo que es difícil para el alumno, comprender qué está haciendo.

Lo anterior nos lleva a replantear el discurso matemático escolar que debe reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos (estáticos), donde surja la cantidad trascendente trigonométrica, por ejemplo, rampas, escaleras, carreteras, edificios, etc.

En relación con este tema en especial, el discurso matemático escolar, durante siglos, ha estado organizado para que los estudiantes respondan con coherencia lógica a hipótesis, muchas veces artificiales, con la idea de que desarrollen su capacidad argumentativa. Los docentes debemos replantear nuestro discurso en el aula y exponer ante los alumnos problemas y ejemplos cercanos a su experiencia social con el mismo propósito de desarrollar un pensamiento matemático.



En este sentido, el discurso escolar basado en el estudio de la proporcionalidad en la práctica cotidiana debe considerar actividades donde el estudiante desarrolle habilidades para medir, comparar, aproximar, conjeturar, … como el camino que lo lleve a descubrir relaciones proporcionales en su realidad a través de las actividades didácticas que propongamos los profesores para la construcción de las nociones trigonométricas asociadas.

En este tenor es conveniente que los profesores busquemos la construcción de modelos geométricos visuales, por parte del alumno, sea materializada en imágenes gráficas que implícitamente contengan el concepto de proporcionalidad, y donde ellos expliquen cómo aplican el concepto de escala. Esta construcción será entonces la forma que el estudiante tiene de sintetizar, exponer y argumentar su actividad de aprendizaje. Para trabajar con esta idea, es importante que los profesores tengamos claro que existe una diferencia sustancial entre usar y construir, en contraste con definir y aplicar.

Por último, consideramos que en clase y en los materiales didácticos, los conceptos básicos deben trabajarse tanto en forma verbal como en sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica para propiciar un mejor aprendizaje de los mismos y del lenguaje matemático.

IV. Sugerencias de estrategias didácticas

La propuesta de las estrategias de aprendizaje es amplia, el profesor puede elegir algunas, las que considere que le ayudan al diseño de su clase. Cabe destacar que la secuencia de estrategias listadas aquí se apega al enfoque de enseñanza que ya hemos explicado en el apartado de sugerencias para superar las dificultades en el aprendizaje de la trigonometría básica, por lo que en ellas se pueden encontrar descritas las interacciones entre epistemología del conocimiento trigonométrico, la dimensión social del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de formalización de este conocimiento.

Las sugerencias didácticas que proponemos se sustentan en el enfoque plasmado en el programa de Matemáticas III y en el documento Sentido y Orientación del Área de Matemáticas, así como nuestra en propia experiencia docente.

V. Estrategias de aprendizaje

- Haga que los estudiantes exploren situaciones donde puedan descubrir las correspondencias entre figuras semejantes.
- Muestre ejemplos para probar si dos triángulos son semejantes y para usar la proporcionalidad entre lados correspondientes de triángulos semejantes para hallar las longitudes desconocidas de un triángulo.
- Revise el vocabulario matemático formal de este tema.
- Solicite a los estudiantes que escriban un plan donde usen medición indirecta para hallar la altura de una escultura.
- Use las características de las escalas y resalte su importancia, aplíquelos en planos de una planta de un edificio.
- Pida a los estudiantes describir el método usado para expandir una forma con curvas.
- Para practicar más el razonamiento matemático, introduzca el término dilatación (ampliar) para aplicarlo en triángulos rectángulos.
- Proponga actividades de exploración y haga que los estudiantes relacionen las ideas de pendiente y semejanza de triángulos rectángulos para hallar medidas indirectamente en el contexto de la construcción de un camino. En consecuencia, haga que los resultados sean generalizados.
- Utilice ejemplos que muestren cómo usar tangentes en la medición indirecta.
- Revise y utilice el vocabulario formal de este tema.
- Pida a los estudiantes analizar cómo el incremento en las longitudes de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia, afectan el valor del radio tangente.
- Para mayor entrenamiento en el razonamiento matemático, ilustre con esquemas que los vértices de triángulos rectángulos que se pueden formar con una hipotenusa dada forman un semicírculo.

- Diseñe actividades de exploración donde los estudiantes descubran la relación entre razones en el triángulo rectángulo, el seno y el coseno.
- Haga una actividad de reflexión donde muestre que el seno o el coseno pueden ser usados para resolver el mismo problema para hallar distancias indirectamente.
- Use una actividad de aproximación inductiva para que los estudiantes analicen los valores de las funciones trigonométricas entre cero y noventa grados.
- Pida a los estudiantes que evalúen métodos alternativos para resolver un problema.
- Explique lo que significa ángulo de depresión y ángulo de elevación y proponga ejercicios donde los aplique.
- Guíe a los estudiantes para que observen que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- Use la medición indirecta para hallar las alturas de edificios, cañadas, montañas, etc.
- Pida a los estudiantes evaluar soluciones alternativas para una misma proporción.
- Solicite a los alumnos hallar una forma alternativa para resolver un problema de medición indirecta.
- Proponga problemas donde los estudiantes tengan que usar más de un triángulo rectángulo para llegar a la solución.

VI. Sugerencias de estrategias de evaluación

Las actividades propuestas en esta guía, también pueden ser utilizadas como instrumentos de evaluación para conocer, durante el proceso de aprendizaje-enseñanza, los avances y tropiezos que el alumno va logrando y/o enfrentando. Son un conjunto de materiales didácticos graduados por nivel de dificultad que, en nuestra experiencia, ayudan en la tarea de observar el proceso de aprendizaje de los *elementos de trigonometría*.

Para evaluar el desempeño de los alumnos en la unidad, sugerimos al profesor que diseñe una actividad para valorarlo como sigue:

Pida a los estudiantes que: Dibujen un mapa que muestre su casa y la escuela y que marquen entre ambos al menos un sitio más como referencia. Que escriban una explicación para un amigo suyo acerca de cómo usar las ideas sobre la distancia aprendidas en esta unidad y como hallar distancias entre dos de sus sitios de referencias. También pida que explique cómo podrían hallar la distancia si no pueden medir directamente (tales como una distancia para cruzar el Periférico). Si su mapa no sirve para este problema facilíteles un mapa de la ciudad para que puedan hacer la tarea.

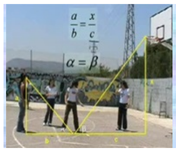
Otro ejemplo de lo que estamos mencionando pueden ser las actividades que proponen proyectos de investigación a los estudiantes sobre situaciones cotidianas que pueden ser modeladas con la trigonometría básica estudiada aquí. Podemos mencionar algunos de dichos proyectos: *Altura de la montaña*, *Producción y empaque de alambre*, entre otros.

Este tipo de actividades, rompe con las tradiciones escolares que omiten problematizar el saber y la actividad como parte del aprendizaje y en consecuencia despojan, como ya dijimos, a la razón trigonométrica de su naturaleza proporcional.

VII. Actividades de aprendizaje

La secuencia de actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad 1, ***Elementos de trigonometría*** que aquí presentamos no agota los contenidos temáticos de la unidad, pero pueden dar al profesor una idea para organizar su enseñanza-aprendizaje; también pueden servir de base para que, si es su deseo, pueda mejorar éstas o elaborar las suyas.

Muchas de estas actividades las hemos aplicado en el aula y hemos conseguido buenos resultados. Esperamos que quien las aplique y las conteste, también obtenga beneficios de su uso.



Secuencia didáctica

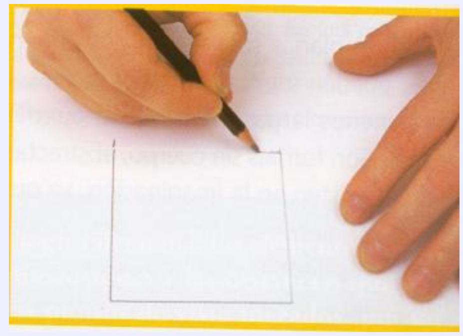
	Título de la actividad	Temática
1	**Taller para construir razones trigonométricas**.	Relaciones de las medidas de los ángulos y las medidas de los lados de un triángulo.
2	**Comparando razones trigonométricas: razón seno**	Patrón de comportamiento de la razón seno para un ángulo común en triángulos semejantes.
3	**Comparando razones trigonométricas: coseno y tangente**	Patrón de comportamiento de las razones coseno y tangente para un ángulo común en triángulos semejantes.
4	**Las razones de los ángulos.** ***Razones trigonométricas de ángulos particulares***	Razones trigonométricas de los ángulo de 30°, 45° y 60°.
5	**Aristarco: tamaño del sistema solar**	Cálculo de razones trigonométricas
6	**Interpretación geométrica de las razones trigonométricas recíprocas**	Problemas de aplicación y uso de la calculadora.
7	**Medir la altura del Ángel de la Independencia**	Uso de la trigonometría en la medición indirecta.
8	**Miradas desde el puente Chachalacas, Ver**	Ángulos de elevación y depresión.
9	**Ptolomeo y la trigonometría**	Comprensión de las razones trigonométricas.
10	**Identidades trigonométricas**	Identidades Pitagóricas

Secuencia didáctica
Elementos de trigonometría
Continuación

	Actividad	Temática
11	**Modelación de la ley de los senos**	Construcción de la ley de los senos**.**
12	**¿Para cualquier ángulo acutángulo?** **Ley de senos**	Aplicación con la ley de los senos.
13	**Modelación de la ley de los cosenos**	Construcción de la ley de los cosenos**.**
14	**Aplicación de las leyes** **Ley de senos y ley de cosenos**	Aplicación con la ley de los cosenos.
15	**Evaluación de la unidad**	Propuesta de instrumento para evaluar la unidad de elementos de trigonometría.

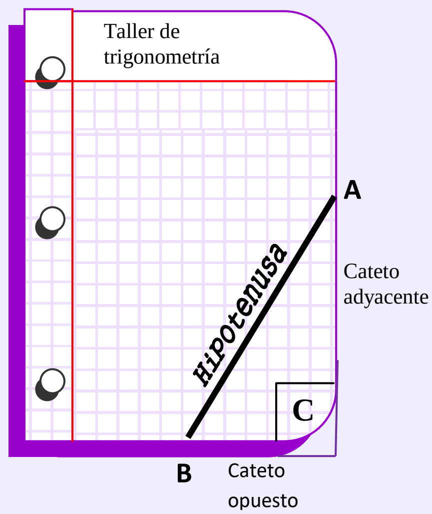
Taller para construir razones trigonométricas

Actividad de exploración



Propósito: El alumno explorará dibujando un triángulo rectángulo y determinará las razones trigonométricas de uno de sus ángulos agudos.

Materiales: Una hoja de papel de cuaderno, regla y transportador.



Instrucciones: Usa una hoja tamaño carta, dibuja un línea recta de manera que formes un triángulo rectángulo utilizando una de las esquinas de la hoja como ángulo recto del triángulo. Dado que la esquina que escogiste representa el ángulo recto, la línea que dibujaste es la hipotenusa. Haz por triplicado lo mismo de tal manera que los triángulos rectángulos formados con las esquinas de las hojas sean congruentes.

CONTESTA

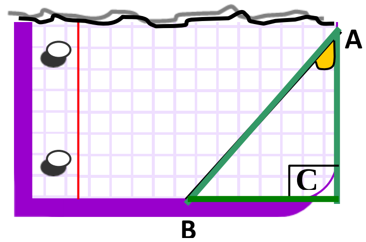
1. Nomina los otros vértices de tu triángulo con las letras A y B, como se ve en la figura de arriba.

El Δ ABC es rectángulo en $\angle$C:

AB es la ______________.

AC es el cateto __________ del $\angle$A.

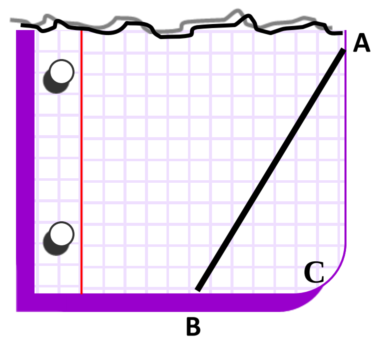
2. En uno de tus triángulos, con un color muy visible, remarca la orilla que representa el cateto adyacente al ∠A y con el mismo color ilumina la hipotenusa.



El coseno del ∠A se escribe como:

$$\cos A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{AC}{AB}$$

3. En otro de tus triángulos preparado con la esquina de la hoja, con un color muy visible, remarca la orilla que representa el cateto opuesto al ∠A y con el mismo color ilumina la hipotenusa y completa lo que falta.



BC __________ ______________ del ∠A.

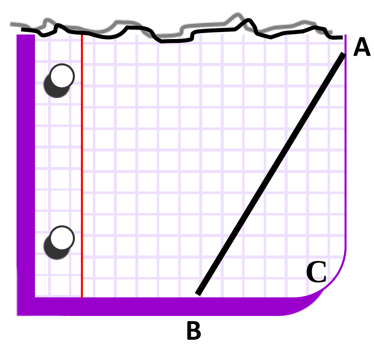
El seno ∠A se escribe como:

$$sen\ A = \frac{cateto\ opuesto}{\_\_\_\_\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{AB}$$

La tangente del ∠A es:

$$\tan A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \_\_\_$$

4. Usa una regla graduada en centímetros y un transportador para medir, lo más preciso posible, los tres lados y el ángulo A del Δ ABC.



5. Registra las medidas sobre tu dibujo y procede como sigue:

A) En la siguiente tabla, llena el segundo renglón utilizando los datos de las medidas de los lados que obtuviste.

B) Escribe y calcula las tres razones trigonométricas que se piden en las columnas y aproxima hasta tres decimales empleando redondeo simétrico.

C) Usa tu calculadora para hallar los valores de las razones trigonométricas del ∠A que se te piden en el tercer renglón de la tabla, emplea el mismo redondeo.

Medida del ángulo A	**Longitud del cateto opuesto al ángulo**	**Longitud del cateto adyacente al ángulo**	**Longitud de la hipotenusa**	$\frac{C.opuesto}{Hipotenusa}$	$\frac{C.adyacente}{Hipotenusa}$	$\frac{C.opuesto}{C.adayacente}$
____	____	____	____	____ = ________	____ = ________	____ = ________
Usa la calculadora y halla los valores				Sen A =	Cos A =	Tan A =

Comunica

6. Compara los valores en cada una de las columnas, es decir, razón trigonométrica y función (sen, cos y tan) de la calculadora. ¿Cómo son entre sí? Explica ampliamente.

Piensa y comunica

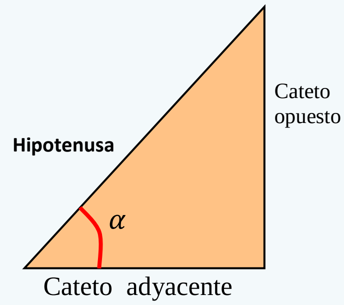
7. Haz un triángulo rectángulo isósceles, escoge un valor para la constante de proporcionalidad y dibuja un triángulo semejante al que tienes. Explica lo más ampliamente posible, por qué sen 45° = cos 45° en estos triángulos.

8. Ya que el seno de un ángulo es una razón. ¿Qué medidas podría tener un triángulo rectángulo para que el valor del seno de uno de sus ángulos sea 0.5? Explica.

9. En un triángulo rectángulo, el $cos \propto = \frac{10}{x} = 0.5592$. Dibuja el triángulo correspondiente y anota en él sus elementos. Obtén el valor de *x*, muestra los pasos que hiciste para hallarlo.

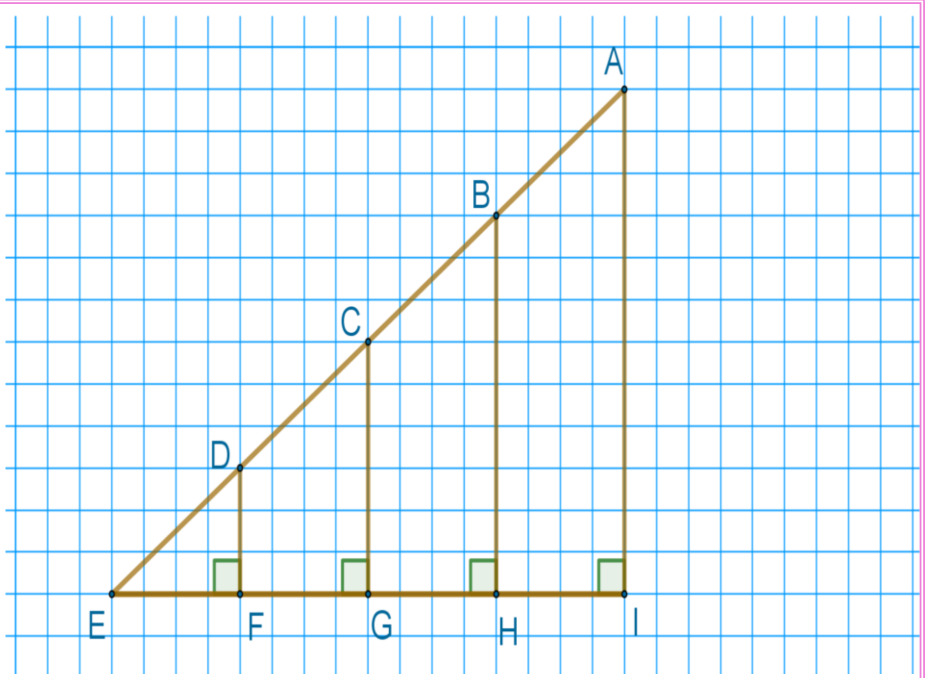
Razón seno

Alrededor del siglo IV, los hindúes poseían conocimientos trigonométricos más avanzados que los griegos en métodos y precisión, pues ya tenían calculada una tabla de senos para cada 3.75° desde 0° hasta los 90°.



CONTESTA

1. Los cuatro triángulos rectángulos dibujados en la cuadrícula, nominados por sus vértices, son: ________, **ΔECG,** _________ **y** _________**.**



2. Usa el teorema de Pitágoras para calcular las hipotenusas de cada triángulo:

Hipotenusa del **ΔEDF**	Hipotenusa del **ΔECG**	Hipotenusa del **ΔEBH**	Hipotenusa del **ΔEAI**
	$EC^2 = EG^2 + CG^2$ $\sqrt{EC^2} = \sqrt{\quad + \quad}$ $EC = 10$		

3. Completa la tabla de las razones trigonométricas —usa ambas expresiones— en forma decimal y de quebrado.

Triángulo	**ΔEAI**	**ΔECG**	**ΔEBH**	**ΔEAI**
$\dfrac{\textbf{cateto op al } < E}{\textbf{hipotenusa}}$		$\dfrac{CG}{EC} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0.6$		

4. ¿Cómo resultan las razones al compararlas? ¿Observas algún patrón de comportamiento? Explica.

5. ¿Cuál de los ángulos es común en todos los triángulos? ________________________

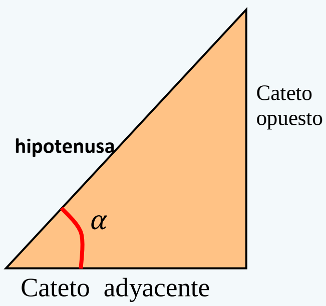
6. ***Comunicación.*** La razón que encontraste se llama **razón seno** para un ángulo común. Explica el significado de la **razón seno del ángulo común** de todos los triángulos describiendo cuál es la posición de los lados en relación con dicho ángulo.

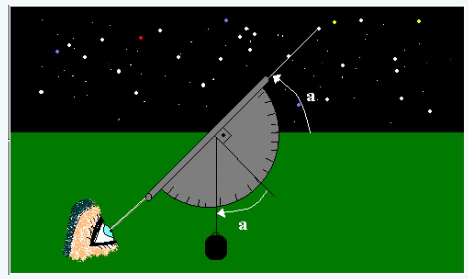
El valor del seno de un ángulo dado es único, no importa si el ángulo es de un triángulo rectángulo ___________ o uno proporcionalmente más _________.

Comparando Razones Trigonométricas

Razón Coseno y razón Tangente

Actividad de exploración[1]

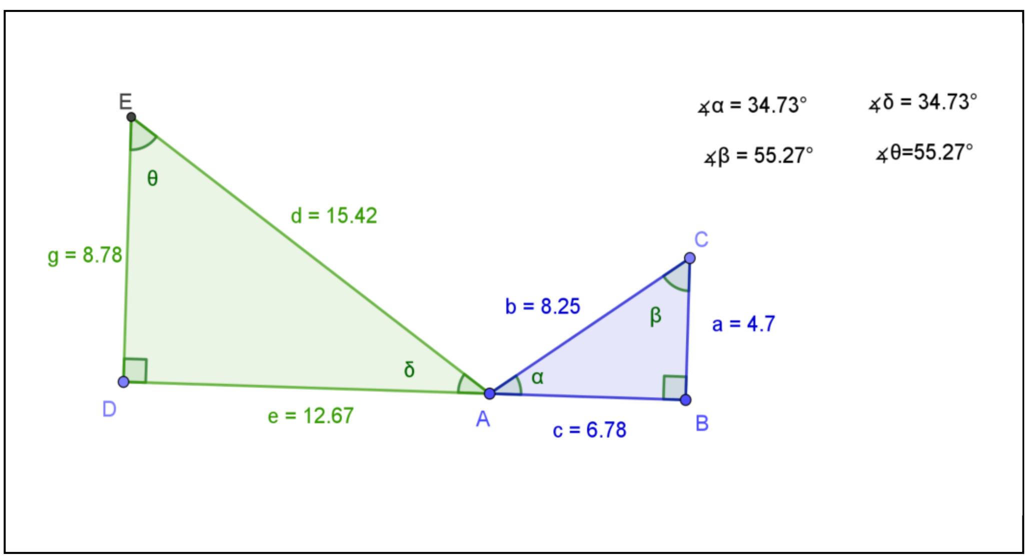




La palabra trigonometría, en el sentido moderno, empezó con Hiparco (190 – 120 a. C.) considerado el astrónomo más grande de la antigüedad. Valiéndose de instrumentos inventados por él mismo, este sabio determinó las posiciones de cerca de 1000 estrellas en términos de sus latitudes y longitudes celestiales y las registró en un mapa.

CONTESTA

1. De los siguientes triángulos se brinda toda la información de sus lados y sus ángulos.



[1] http://www.pucrs.br/fisica/astronomia/astrolabio.gif

Usa el criterio LLL para verificar que los triángulos son semejantes. Escribe los argumentos que sean necesarios para justificar tu respuesta. Calcula el factor de escala.

2. Completa la tabla de las razones trigonométricas coseno y tangente, usa ambas expresiones, en forma decimal (usa redondeo simétrico con 2 decimales) y de razón (de quebrado).

Triángulo	**ΔABC**	**ΔADE**
Razón coseno del 34,73°	$\frac{6.78}{8.25} = 0.82$	
Razón tangente del 34,73°		
Razón coseno del 55.27°		
Razón tangente del 55.27°		

3. ¿Cómo resultan las razones al compararlas con respecto del mismo ángulo? ¿Observas algún patrón de comportamiento? Explica.

Para coseno   Para tangente

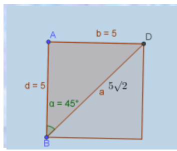
4. Sabes que en triángulos rectángulos semejantes, las medidas de los ángulos son respectivamente iguales, por lo tanto, el valor de cada razón trigonométrica para ángulos es el mismo en ambos triángulos.

Compruébalo con ayuda del archivo de GeoGebra:
Razones trigon.ggb
Toma los datos de los triángulos y calcula las razones trigonométricas[2].

Anota el ángulo	**ΔABC**	**ΔADE**
Cos ( )	——— =	
Tan( )		
Sen ( )		

5. Escribe tu conclusión.

[2] Nota: Si deseas comprobar para otros triángulos. Modifica la posición del punto B o D.

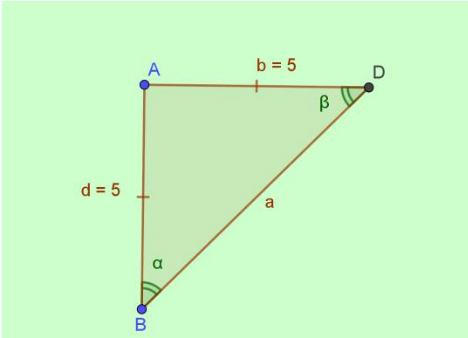


Las razones de los ángulos

Razones trigonométricas de ángulos particulares

Actividad de exploración

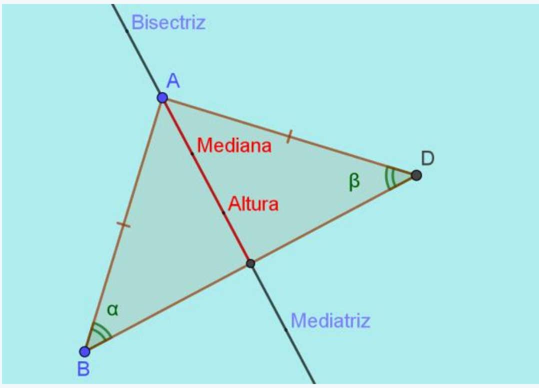
Existen propiedades y características de los triángulos isósceles y rectángulos que permiten obtener los valores trigonométricos exactos para ángulos de medidas específicas, sin usar la calculadora. Es importante aprender los valores de estas razones trigonométricas porque resultan de gran utilidad a la hora de resolver problemas que involucran estos triángulos.



En todo triángulo isósceles:

1. Los lados congruentes se oponen a los ángulos congruentes.

2. La bisectriz del ángulo comprendido entre los lados congruentes es mediatriz y contiene a la mediana y a la altura respectiva.



Con estos elementos y algunas características del cuadrado se pueden obtener todos los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Objetivo

Determinar los valores de las razones trigonométricas para algunos valores particulares de ángulos.

Material regla y compás, (***sin usar transportador***).

Trabajo en equipo.

I. Construir un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos sean 30° y 60° donde la hipotenusa mida 2 cm y expliquen por qué tendría esas medidas.

Construcción	Explicación

Si no encuentran cómo trazarlo, resuelvan lo siguiente.

CONTESTEN

1. ¿Conocen un triángulo cuyos ángulos midan 60°? ____. ¿cuál?_______________

Efectivamente el triángulo equilátero también es equiángulo.

2. Construyan un triángulo equilátero de lado 2cm. y a partir de él, ¿pueden construir el triángulo solicitado?, _____, ¿cómo?

Construcción	Explicación

Construyan la mediana a alguno de los vértices, esta línea divide al triángulo equilátero en dos triángulos con los ángulos solicitados, ¿por qué?____________

Usen las características de la mediana (en este caso también es altura) y el teorema de Pitágoras para obtener la medida de los otros lados y justifiquen sus respuestas.

Si hicieron bien las cosas, pueden completar la siguiente tabla que les permitirá saber sí están bien sus resultados:

Ángulo x(°)	*sen(x)*	*cos x*	*tan x*
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\ }{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{\ }$
30	$\frac{1}{2}$	___	___

¿Cambiarán los resultados si la medida de la hipotenusa es diferente?______, ¿por qué?

____

Realicen la construcción en GeoGebra y verifiquen lo obtenido, consideren modificar el tamaño del triángulo para confirmar la última pregunta.

Peguen aquí su construcción.

Problemas de aplicación

Justifiquen siempre sus respuestas.

1. Obtener el área de un hexágono regular con la información dada:
    a. El radio de la circunferencia en el que está inscrito mide 8cm.

    b. El lado del polígono es de 6m.

Ahora lo harán al revés, primero construirán el triángulo en GeoGebra y después encontraran las relaciones con respecto al ángulo.

1. Construyan en Geogebra un cuadrado, con el comando de polígono regular.
2. Tracen un triángulo con el comando polígono, de forma que sus vértices sean tres vértices del cuadrado.
3. Verifiquen que el triángulo es isósceles y que los ángulos agudos miden 45°.
4. Den una explicación de porqué ocurre esto.

Construcción	Explicación

5. Anoten la medida de los lados del triángulo con redondeo de 4 dígitos

Lado	Medida

6. Expresen los valores exactos de las razones trigonométricas y calculen los cocientes y escriban sus expresiones decimales con aproximación de 4 dígitos: Después, obtengan las mismas razones trigonométricas con la calculadora y hagan la comparación de ambos valores: los que ustedes obtuvieron y los generados por la calculadora.

	Expresión de los valores:		
Razón trigonométrica	*Exactos*	*Con aproximación a 4 dígitos*	*Con la calculadora*
sen(45°)			
cos(45°)			
tan(45°)			
cot(45°)			
sec(45°)			
cosec(45°)			

7. Construyan un triángulo isósceles rectángulo con una unidad como la medida de los lados iguales. Con él y usando el teorema de Pitágoras obtengan la medida de la hipotenusa y justifiquen cada paso.

Construcción	Explicación

8. Un regla nemotécnica es la siguiente: sacar la raíz cuadrada de 1 ó 2 ó 3 si queremos escribir el seno de 30°, 45° ó 60° respectivamente y a ello dividirlo entre 2, si queremos coseno sacamos la raíz cuadrada de 3 ó 2 ó 1 y lo dividimos entre 2.

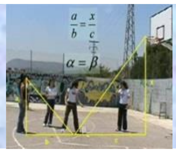
$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc} 30^\circ & 45^\circ & 60^\circ \end{array} \\ \begin{array}{l} \textit{sen } x \\ \cos x \end{array} & \dfrac{\sqrt{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}}}{2} \end{array}$$

9. Con la regla anterior completen la tabla para los valores de las razones trigonométricas que se piden.

Ángulo x (°)	*sen x*	*cos x*	*tan x*[3]
30°	$\frac{1}{2}$		
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		

10. Expliquen porqué funciona.

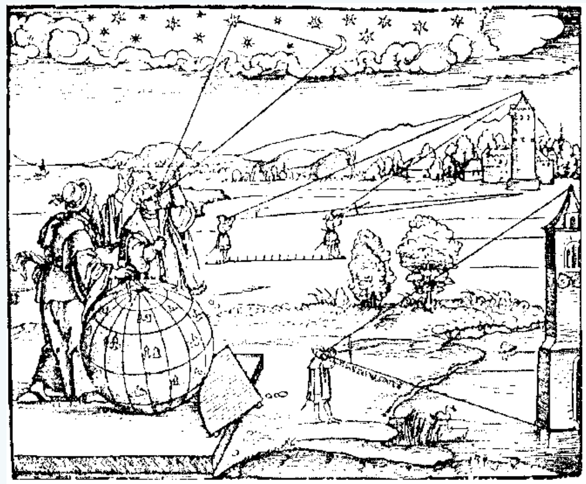
[3] La $tan\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$



Aristarco: Tamaño del Sistema Solar

Calculando razones trigonométricas

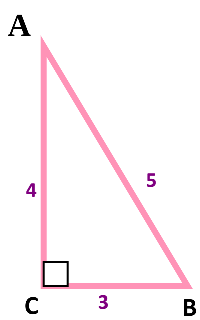
¿Cómo hacer mapas, puentes, medir la distancia a las estrellas, construir caminos y altas torres, enviar y recibir mensajes desde los satélites, navegar los mares y muchas otras actividades sin la trigonometría? Respuesta: no se puede. Aristarco (310-230 a. C.) realizó uno de los primeros intentos por medir el tamaño de nuestro sistema solar, además demostró que los diámetros de la luna y el sol eran diferentes aun cuando en un eclipse solar parezcan iguales. Para sus cálculos y demostraciones utilizó la trigonometría, es decir, usó razones y proporciones de los elementos de un triángulo.



Grabado realizado en 1533 por Johann Werner que sirvio para ilustrar un texto de italiano Pietra Apiani, pionero de la instrumentación astronómica y geográfico

CONTESTA

1. Encuentra todas las razones trigonométricas que se piden para el triángulo cuyas medidas se anotan en la ilustración siguiente.



cos A = $\dfrac{\textit{cateto}}{\textit{hipotenusa}}$ = ——

cos B = $\dfrac{\textit{cateto}}{\textit{hipotenusa}}$ = $\dfrac{\quad}{5}$

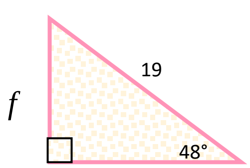
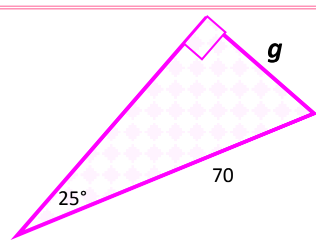
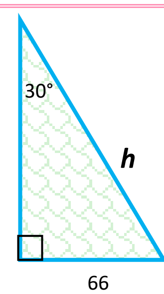
sen A = ———————— = ——

sen B = ———————— = ——

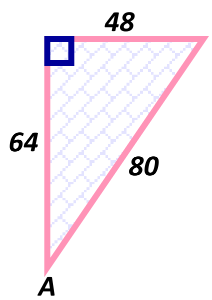
2. Resuelve cada ecuación.

a) $\frac{x}{150} = 0.4293$	*b*) $\frac{7.5}{m} = \frac{15}{24}$
c) $\frac{203}{p} = 0.4521$	*d*) $\frac{y}{9} = 0.6162$

3. Encuentra el valor de la literal.

		
***f* =** —— =	***g* =** —— =	***h* =** —— =

4. Relaciona cada cociente con su correspondiente razón trigonométrica y escríbela en el paréntesis correspondiente.



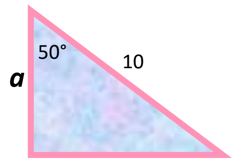
( ) $\frac{48}{64}$	**a)** sen A
( ) $\frac{48}{80}$	**b)** cos A
( ) $\frac{64}{80}$	**c)** tan A

Solución de Problemas

5. El faro luminoso del restaurante "El faro de Acapulco" mide 34 metros de altura. Este faro se ve desde la bahía del puerto. Tres estudiantes intentaron medir, desde un yate, la altura del faro del restaurante. ¿Quién o quiénes de ellos obtuvieron la medida correcta? ***h*** representa la altura del faro. Justifica tu respuesta.

A) Pedro $\text{sen } 73° = \frac{35.3}{h}$	B) María $\tan 81° = \frac{h}{5.4}$	C) Rubén $\cos 45.7° = \frac{h}{24}$
Justificación:		

6. En el siguiente triángulo rectángulo encuentra el valor de ***a*** si sabemos que tiene un ángulo de 50° y su hipotenusa mide 10 Km.



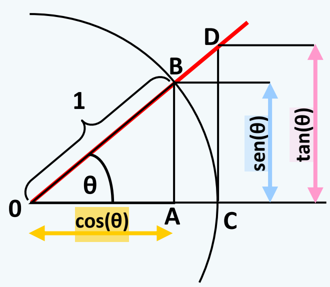
$$\cos 50° = \frac{cateto}{hipotenusa} = \frac{\quad}{10}$$

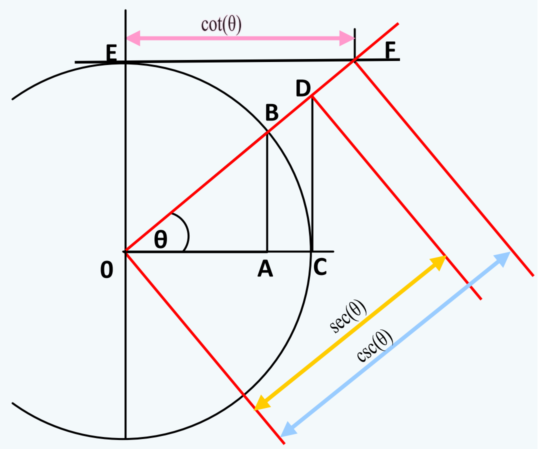
Interpretación Geométricas

De las razones trigonométricas recíprocas

Razones trigonométricas recíprocas

$sen(\theta) = \frac{AB}{OB}$ $\quad$ $\cos(\theta) = \frac{OA}{OB}$ $\quad$ $\tan(\theta) = \frac{AB}{OA}$ $\quad$ $\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$ $\quad$ $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ $\quad$ $\csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)}$





OB = OC = 1, de donde

sen(θ) = AB, cos(θ) = OA;

$$\tan(\theta) = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OC} = CD$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)} = \frac{1}{\frac{AB}{OB}} = \frac{OB}{AB}$$

Porque $sen(\theta)$ es igual al cateto opuesto sobre la hipotenusa.

Efectuando la división queda la razón recíproca del seno.

$$\frac{OB}{AB} = \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{1} = OF$$

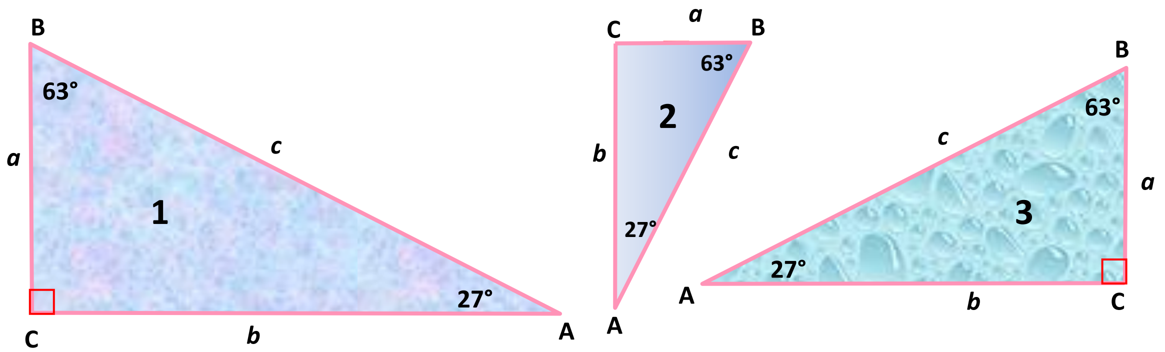
Como ΔOCD ≈ ΔOAB por el criterio AAA, los lados son proporcionales.

CONTESTA

1. Usa la información del esquema para completar las siguientes expresiones. Explica cada paso de tu proceso.

a) $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{OB}{OA}$ $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{\quad}{OC} = \dfrac{OD}{\quad} = OD$	b) Demuestra que ***cot(θ) = EF.***

2. Los triángulos dados son semejantes. Haz lo que se te pide.



a) Mide los lados *a*, *b* y la hipotenusa **c**, en cada triángulo. Calcula las razones $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$ para cada triángulo. Redondea y completa la tabla.

Δ	***a***	***b***	***c***	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$	**tanA**	**cosA**	**senA**
Δ1				$\frac{3.5}{7} = \frac{1}{2}$					
Δ2									
Δ3									

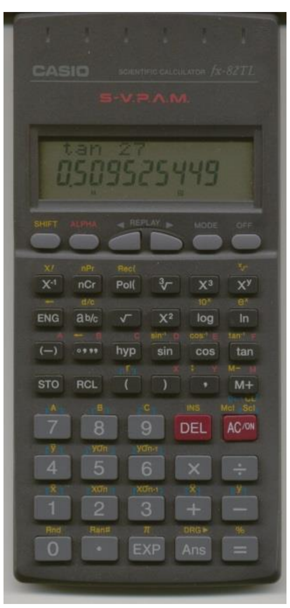
b) ¿Cuál es la medida del ángulo para el que calculaste los valores en la tabla?

c) Elabora una tabla similar a la anterior para calcular las razones trigonométricas del otro ángulo agudo.

Uso de la calculadora

d) Con ayuda de una calculadora completa la tabla. Asegúrate de trabajar en *mode degree (D)*, redondea tus resultados a milésimos y completa la tabla.

Δ	$tanA$	$cosA$	$senA$
$\Delta 1$			
$\Delta 2$			
$\Delta 3$			



Si tu calculadora es parecida a esta, es decir, tiene dos líneas de despliegue en la pantalla, para hallar la tangente de 27°, oprime las teclas como sigue:

tan	27	=

Si tu calculadora tiene pantalla de una sola línea, lo más seguro es que tengas que oprimir las teclas en la siguiente secuencia:

27	tan	=

En las calculadoras, para hallar las razones trigonométricas recíprocas debes oprimir la tecla ***1/x*** o $\boldsymbol{x^{-1}}$ inmediatamente después de oprimir las teclas cos, sin y tan, de esa manera obtienes la secante, cosecante y cotangente, respectivamente.

e) Compara los resultados obtenidos con tu calculadora y los que conseguiste en la primera tabla, ¿qué notas?

Piensa y comunica

3. Calcula las razones $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ y $\frac{c}{b}$ para cada triángulo. Redondea y completa la tabla.

Δ	*a*	*b*	*c*	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{a}$	cotA	secA	cscA
$\Delta 1$				$\frac{7}{3.5} = 2$					
$\Delta 2$									
$\Delta 3$									

a) ¿Cuál es la medida del ángulo para el que calculaste los valores en la tabla?

b) Haz otra tabla semejante para calcular las razones trigonométricas recíprocas del otro ángulo.

c) Usa calculadora para encontrar $cscA$, $secA$ y $cotA$ para todos los triángulos. Asegúrate de que el aparato esté trabajando en *mode degree*, redondea tus resultados a milésimos y completa la tabla.

Δ	$cotA$	$secA$	$cscA$
Δ1			
Δ2			
Δ3			

d) Compara los resultados obtenidos con tu calculadora y los que conseguiste en la primera tabla, ¿qué notas?

3. ¿Puedes definir $senA, senB, cosA, cosB, tanA\ y\ tanB$ en términos de las longitudes de sus lados *a*, *b* y *c*? Si es así, ¿cómo son?

4. ¿Puedes definir $cscA, cscB, secA, secB, cotA\ y\ cotB$ en términos de las longitudes de sus lados *a*, *b* y *c*? Si es así, ¿cómo son?

Medir la altura del Ángel de la Independencia

Uso de la trigonometría en la medición indirecta

El arquitecto Antonio Rivas Mercado fue el autor del proyecto. El ingeniero Roberto Gayol realizó y dirigió la obra y el artista italiano Enrique Alciati se encargó de las esculturas.

La base es cuadrangular, y en cada uno de sus vértices aparecen figuras en bronce, que representan la Ley, la Justicia, la Guerra y la Paz, donde se lee: "la Nación a los Héroes de la Independencia" y delante de esta inscripción, está un león gigante en bronce conducido por un niño que simboliza: fuerte en la guerra y dócil en la paz.

En la cúspide de la columna está el Ángel de la Independencia, representa la Victoria Alada, es obra del escultor italiano Enrique Alciati. Está hecha de bronce con recubrimiento de oro, mide 6.7 metros de altura y pesa 7 toneladas, en una mano sostiene la corona de laurel símbolo de la victoria y en la otra una cadena con eslabones rotos, símbolo de la terminación de la esclavitud impuesta durante 3 siglos de dominio español.

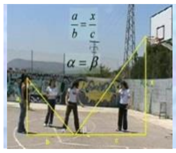
Caída del Ángel en 1957. Esta escultura cayó a tierra durante el sismo de la madrugada del 28 de julio de1957 y fue reconstruida y reinaugurada el 16 de septiembre de 1958.

INVESTIGA Y CONTESTA

En todas las preguntas explica lo más ampliamente posible y ofrece argumentos razonables.

1. ¿Qué significado tiene para nosotros la frase «medir lo inconmensurable»? Describe cómo se usó la trigonometría para medir lo que no se podía medir.	2. La altura del monumento del Ángel de la Independencia, podría ser difícil de medir con una cinta métrica. Dibuja un diagrama que muestre cómo podrías medirlo usando trigonometría y hazlo.
3. Usa las partes de un triángulo para describir las tres razones trigonométricas más empleadas.	4. ¿Cómo puede un piloto de avión o de barco usar la trigonometría?

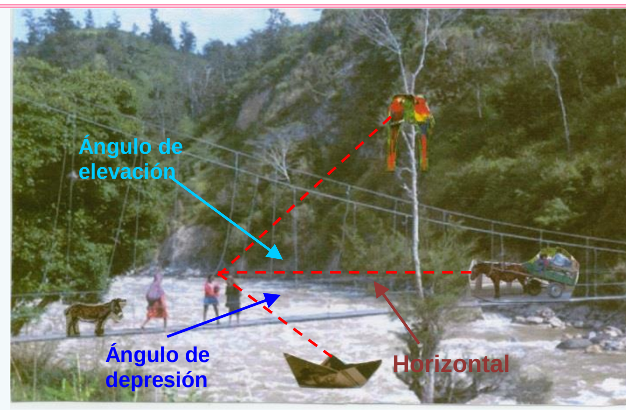
5. ¿Qué significa el sufijo "metría"?	6. ¿Qué piensas del significado de la palabra trigonometría?
7. ¿Qué otras palabras conoces que terminen en "metría" o "metro" y qué significan?	



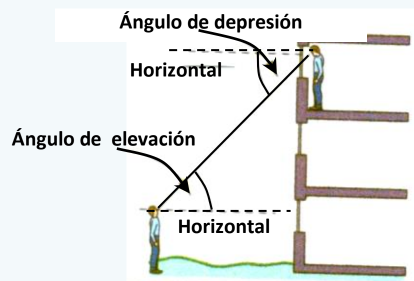
Miradas desde el puente Chachalacas, Ver.

Ángulos de Elevación y Depresión

Un ángulo de elevación o ángulo de depresión a un objeto se



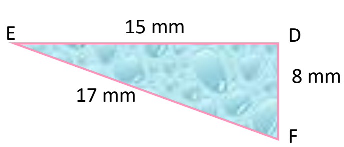
forma con la línea de visión y la línea horizontal, el ojo del observador es el vértice de dicho ángulo.

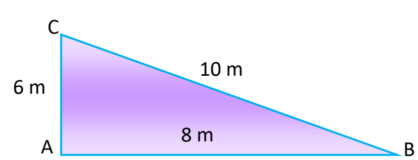


Por ejemplo, si estás parado fuera de la Torre Latinoamericana y miras hacia las ventanas de los pisos superiores, el ángulo que tu línea de visión hace con la horizontal, es el ***ángulo de elevación***, pero si estás mirando por la ventana hacia abajo, entonces el ángulo que forma tu línea de visión con la horizontal es el ***ángulo de depresión***.

CONTESTA

1. Halla el ángulo de elevación/depresión con los datos que se te dan.



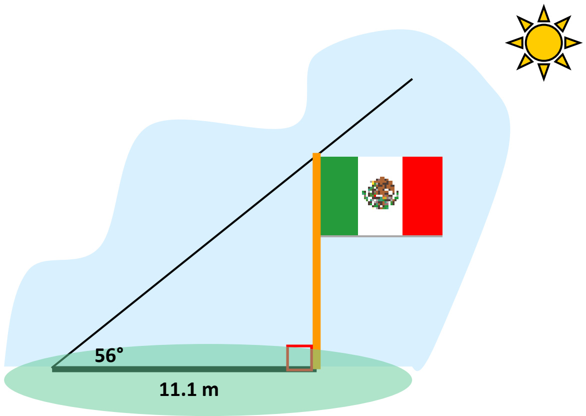


2. ***Paseo aéreo***. Un avión se dirige al aeropuerto de la Cd. de Oaxaca que le queda a 19 Km de distancia. Si el aeroplano vuela a una altura de 8 000 m, ¿cuál es el ángulo de depresión desde la aeronave al aeropuerto. Redondea al entero más cercano.

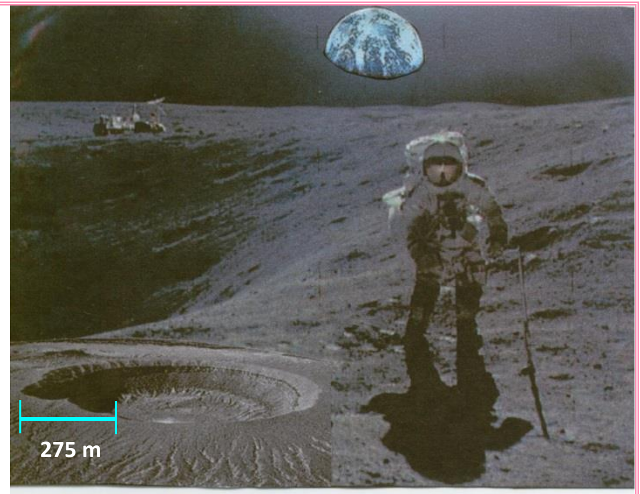
a) Elabora un diagrama que represente la situación. Ubica en tu diagrama el ángulo de depresión.

b) Calcula la tangente del ángulo. Usa tu calculadora para hallar el ángulo. Sugerencia, utiliza la tecla Tan^{-1} (función inversa).

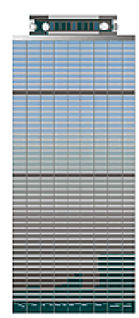
3. ***Asta bandera***. Cuando el ángulo de elevación al sol es de 56°, la sombra del poste de la bandera es de 11.1 m. ¿Cuál es la altura del asta bandera?



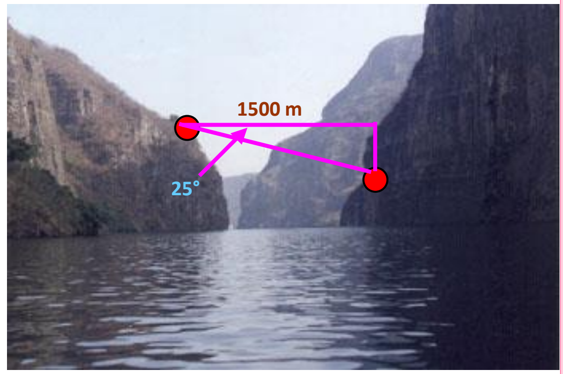
4. ***¿Qué tan profundo está?*** Los científicos usan fotografías y sombras para calcular alturas y profundidades en la luna. Supón que la sombra desde la orilla de un cráter hasta el suelo del mismo, es de 275 m en el momento en el que los rayos del sol forman un ángulo de 20° sobre el horizonte. Si medimos desde la orilla del cráter, ¿Qué tan profundo es el hoyo?



5. ***Vuelo citadino***. Un helicóptero se dirige a la torre de PEMEX que se encuentra a 6.5 Km de distancia. Si el helicóptero vuela a 800 metros de altura ¿cuál es el ángulo de depresión de la nave al helipuerto a 200 m sobre el nivel del suelo?



6. ***Cañón del Sumidero***. En un cierto punto del cañón del sumidero, la orilla norte es más alta que la orilla sur, según se muestra en la ilustración. ¿Cuántos metros hay de diferencia entre las orillas?

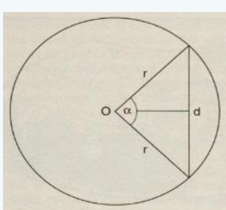


Ptolomeo y la Trigonometría

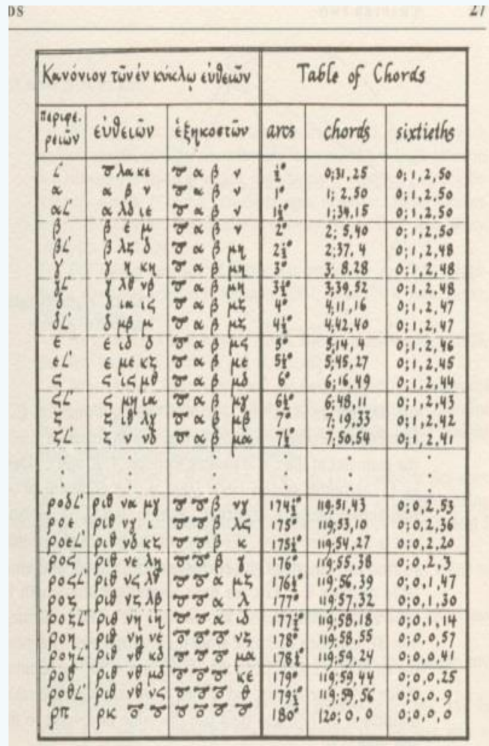
Comprensión de las razones trigonométricas

Ptolomeo y la divulgación de la trigonometría.

Los trabajos de Ptolomeo se contienen en su obra inmortal, denominada por él composición, llamada *gran composición* por los griegos, sus admiradores, *almagisti* por los traductores árabes, expresión que los traductores latinos medievales reprodujeron por almagesto. En esta obra figuran unas fórmulas que, si bien no hace referencia a *senos* ni a *cosenos*, sino únicamente a cuerdas, son miradas como equivalentes a las que siguen $\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$; $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$, deducida ésta última, de un teorema conocido como el teorema de Ptolomeo: "en todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los lados opuestos, es igual al producto de las diagonales"[4].



d = cuerda α = 2rsen α



Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

La tabla de cuerdas de Ptolomeo relaciona los valores de los ángulos con los lados de los triángulos, es equivalente a una moderna tabla de senos trigonométricos.

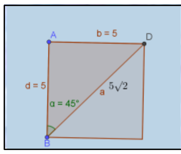
CONTESTA

[4] Notas e ilustraciones tomadas de: Eli Maor *Trigonometrics Delights*, Princeton University Press, USA. 1998, pp. 26 y 27; Agustín Anfosi, *Curso de trigonometría rectilínea*. Edit. Progreso. México 1943.

1. ¿En qué se diferencian las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo?

2. Describe la manera de calcular grandes distancias utilizando triángulos rectángulos. Proporciona al menos un ejemplo.

3. ¿Por qué resultan importantes los triángulos semejantes en las mediciones indirectas?



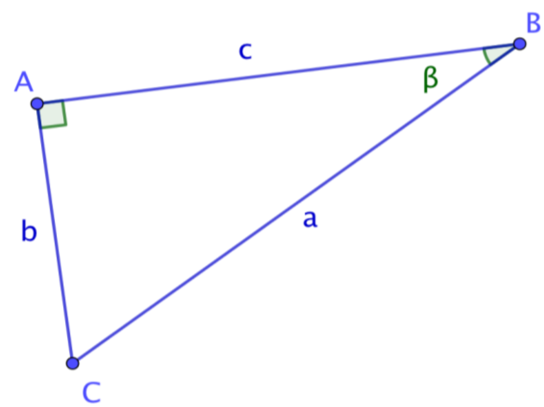
Identidades Trigonométricas

Actividad de deducción

Objetivo

Que el alumno comprenda la deducción de algunas identidades trigonométricas.

I) Para el triángulo rectángulo ABC escribe las razones trigonométricas del ángulo beta (β).



$sen\,\beta =$

$\cos\beta =$

$\tan\beta =$

Obtén a que es igual $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} =$

Con base en las definiciones de las razones trigonométricas sustituye en la expresión anterior, realiza operaciones y simplifica para averiguar a qué razón trigonométrica es igual.

II) Ahora, usa el mismo triángulo ABC y escribe las razones trigonométricas cotangente, secante y cosecante del ángulo beta.

$cot\ \beta =$ $\sec\beta =$ $\csc\beta =$

Recuerda que dos cantidades (a y b) son recíprocas si $a \cdot b = 1$, lo que implica que $a = \frac{1}{b}$ o $b = \frac{1}{a}$.

Demostremos que tangente y cotangente de beta son recíprocas, es decir,

$$\tan\beta \cdot cot\ \beta = 1$$

Sabiendo que $\tan\beta = \frac{b}{c}$ y que $cot\beta = \frac{c}{b}$ sustituyamos en la expresión anterior y obtenemos:

$$\tan\beta \cdot cot\ \beta = \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{bc}{cb} = \frac{bc}{bc} = 1$$

Por lo anterior concluimos que

$$\tan\beta = \frac{1}{cot\ \beta}$$

o bien $cot\ \beta = \frac{1}{\tan\beta}$

Identifica la recíproca de la razón seno y la de coseno de β y demuestra que lo son, empleando el mismo procedimiento.

III) Utiliza el mismo triángulo ABC escribe, con símbolos, lo que dice el Teorema de Pitágoras.

Divide entre a^2 ambos lados de la identidad pitagórica.

Reescribiendo la expresión anterior tenemos:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Por tanto

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1$$

Esta es la identidad pitagórica más importante, explica por qué se llega a ella.

DEMUESTRA

1. $\cot\beta = \frac{\cos\beta}{sen\ \beta}$

2. $1 + tan^2\beta = sec^2\beta$

IV) Necesitas aprenderte las identidades, si lo haces bien podrás ganar en el siguiente. JUEGO para dos personas (tripas de gato).

Reglas

1. En el tablero están colocadas expresiones trigonométricas, a la persona en turno le corresponde con un color unir con una línea continua la pareja de expresiones idénticas, p.e. $\tan(x)\ se\ une\ con\ \frac{sen(x)}{\cos(x)}$. El otro jugador usara otro color y unira otra pareja.
2. Pierde quien:
   a) Al tratar de unir las expresiones con la línea que marca, toca o atraviesa otras líneas o alguna expresión.
   b) Se sale del marco.

c) Une dos expresiones que no forman una identidad trigonométrica.
d) A propósito encierra alguna expresión que impida llegar con otra línea.

$\tan(\alpha)$ $\quad$ $ctg(\alpha)$

$\mathrm{sen}(\alpha)$

$1+\tan^2(\alpha)$ $\quad$ $\sec(\alpha)$ $\quad$ $\mathbf{1}$

$\dfrac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ $\quad$ $csc^2(\alpha)$ $\quad$ $\tan(\alpha)$

$\dfrac{1}{\csc(\alpha)}$ $\quad$ $1+cot^2(\alpha)$

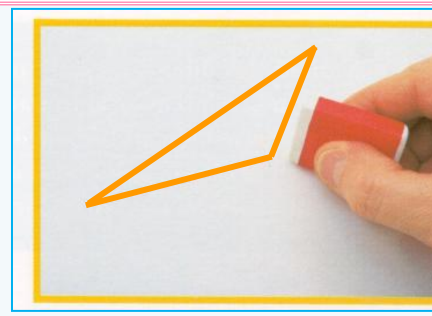
$\dfrac{1}{\cos(\alpha)}$ $\quad$ $sec^2(\alpha)$ $\quad$ $\dfrac{\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}$

$sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)$ $\quad$ $\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

Modelación de la Ley de Senos

Taller de trigonometría

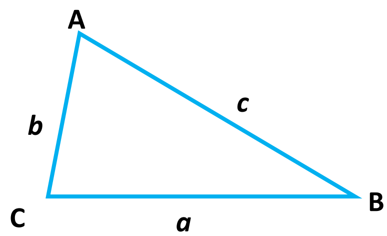
$$\frac{b}{senB} = \frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$



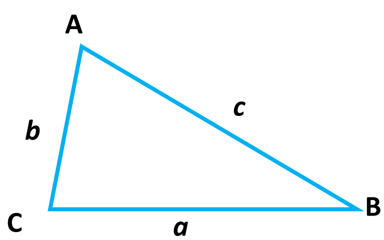
$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

PASOS A SEGUIR

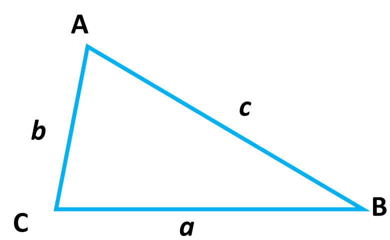
Dado el triángulo ABC, realiza lo que se te pide. Resuelve la secuencia en columna, siguiendo la numeración de los pasos.



1. Traza la altura ***h*** desde el vértice A.



I. Traza la altura $\boldsymbol{h_I}$ desde el vértice B.



Nomina al pie de la altura D y resuelve los ejercicios de la siguiente página.

2. ¿Qué tipo de triángulos son:

ΔACD es ________________________

ΔADB es ________________________

Porque: ____________________________

____

II. ¿Qué tipo de triángulos son:

ΔDBC es ________________________

ΔABD es ________________________

Porque: ____________________________

____

3. En el ΔADB, el seno de B es:

$$senB = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{\quad}{\quad}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{h}$ = ___________

III. En el ΔDBC, el seno de C es:

$$senC = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{\quad}{\quad}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{h_I}$ = ___________

4. En el ΔACD, el seno de C es:

$$senC = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{\quad}{\quad}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{h}$ = _________

IV. En el ΔADB, el seno de A es:

$$senA = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{\quad}{\quad}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{h_I}$ = _________

5. $\boldsymbol{h}$ es la misma altura en ambos triángulos, por lo tanto, de 3 y 4 se obtiene:

___senB = *b*sen__

Divide la igualdad entre *bc* y simplifica:

$$\frac{sen\ B}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

En efecto, los lados y los senos del ángulo guardan una proporción.

V. $\boldsymbol{h_I}$ es la altura en ΔADB y en ΔDBC, por lo que:

___sen C = *c* sen__

Divide en ambos lados de la igualdad entre *ac* y simplifica:

$$\frac{sen\ C}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Lados y senos del ángulo opuesto guardan una proporción.

Combinando los resultados, tenemos:

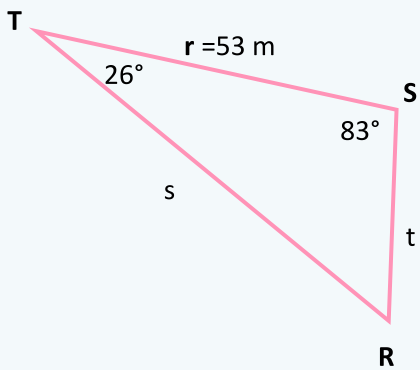
LEY DE LOS SENOS

$$\frac{senA}{\quad} = \frac{senB}{\quad} = \frac{\quad}{c} \quad 0 \quad \frac{\quad}{senA} = \frac{\quad}{senB} = \frac{c}{\quad}$$

¿Para cualquier triángulo acutángulo?

Ley de senos

Ahora vas a aplicar la ley de senos para hallar elementos de un triángulo acutángulo cuando sólo conoces dos ángulos y un lado del triángulo.



En el Δ**RST**, el $\angle$**S** = 83°, *r* = 53 m, $\angle$T = 26°.

Encuentra los elementos del triángulo que faltan.

Redondea tus cálculos al entero más cercano.

CONTESTA

1. Determina la medida del $\angle$**R**.

2. Usa la ley de senos para encontrar la medida de los lados ***s*** y ***t***

$$\frac{s}{senS}=\frac{r}{senR}$$

3. Usa los datos para completar lo que puedas en la expresión anterior:

$$\frac{s}{sen\,\square}=\frac{\square}{sen\,\square}$$

4. De la expresión anterior:

$$s = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$s =$ ___________

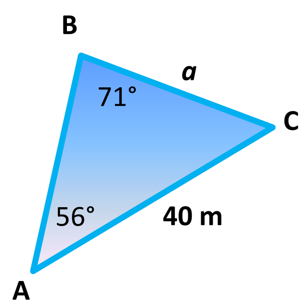
5. Para hallar ***t***, procedemos de la misma manera que con ***s***, es decir, sustituimos los valores conocidos en:

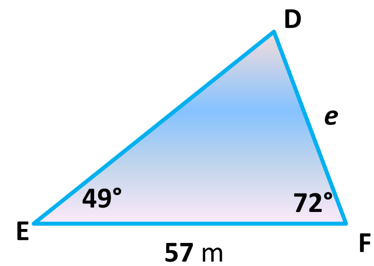
$$\frac{t}{senT} = \frac{r}{senR}$$

Solución:

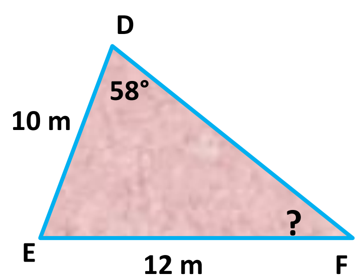
Para desarrollar más habilidades

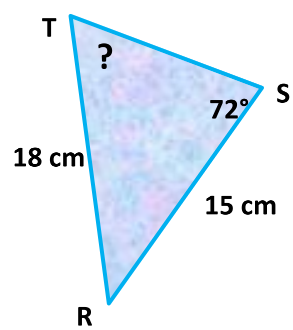
6. Halla la longitud del lado que se indica, redondea al entero más próximo.





7. Para cada uno de los siguientes triángulos hallar la medida del ángulo indicado, redondea al entero más cercano.





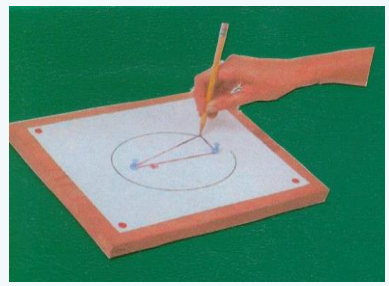
8. En los siguientes incisos dibuja el triángulo indicado y calcula el elemento pedido.

A) En el ΔABC, $\angle B = 38.2°$, $\angle C = 65.6°$ y $\boldsymbol{b} = 54$ cm. Halla el lado $\boldsymbol{c}$.	B) En el ΔDEF, $\angle D = 71.5°$, $\boldsymbol{d} = 7.4$ m y $\angle E = 30.2°$. Halla el lado $\boldsymbol{f}$.
C) En el ΔGHK, $\angle G = 44.1°$, $\boldsymbol{k} = 9.5$ cm y el $\angle H = 78.4°$. Halla el lado $\boldsymbol{h}$.	

Modelación de la Ley de Cosenos

Actividad

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

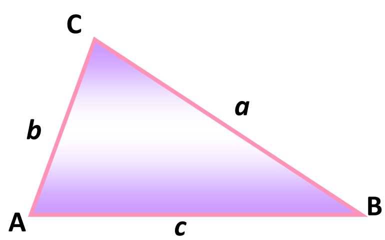


$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

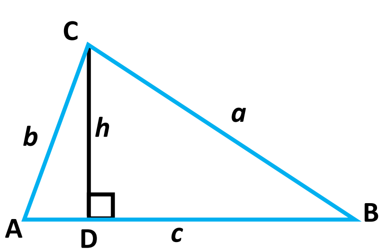
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

PASOS A SEGUIR

I. Dado el triángulo ABC, realiza lo que se te pide. Resuelve la secuencia siguiendo la numeración.



1. Trazamos $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (altura h).



¿Qué tipo de triángulos son:

ΔACD es ________________

ΔCDB es ________________

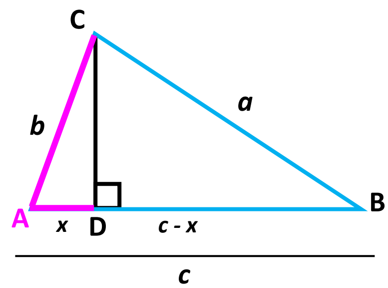
Porque: ___________________________

Si $\overline{AD} = x$, entonces $\overline{BD} = c - x$.

En el ΔACD, $b^2 = h^2 + x^2$.

Y $\cos A = \dfrac{cateto\, adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{x}{b}$, despejamos x

$x = b \cos A$



En el ΔBCD, por el teorema de Pitágoras $a^2 = h^2 + (c - x)^2$.

De donde: $a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$= c^2 + (h^2 + x^2) - 2cx$

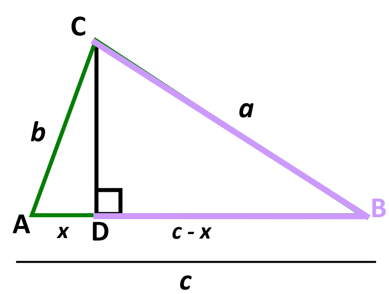
Ahora sustituimos $h^2 + x^2$ por b^2 y a x por $b \cos A$

Por lo tanto $a^2 = c^2 + b^2 - 2c(b \cos A)$

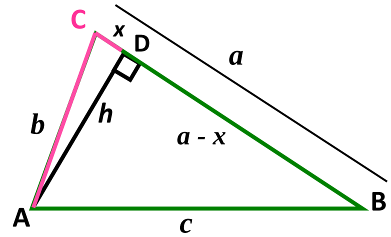
$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos A$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$ **ley de cosenos** (primera forma)

2. Determina la segunda expresión de la ley de los cosenos, usa cos B $= \dfrac{c - x}{a}$, despeja x y sigue el mismo procedimiento anterior.



3. Dado que el ángulo C deberá estar inscrito en un triángulo rectángulo para hallar su coseno, necesitamos trazar una de las alturas del triángulo desde un vértice distinto al C; con ello podremos hallar la tercera expresión de la ley de los cosenos.



Traza la altura desde el vértice A.

Si $\overline{AD} = x$, entonces $\overline{BD} = a - x$.

$$\cos C = \frac{cateto\,adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{b}$$

de donde $\boldsymbol{x = b \cos C}$

En el ΔACD, $\boldsymbol{b^2 = h^2 + x^2}$

$\therefore\ \boldsymbol{h^2 = b^2 - x^2}$

En el ΔADB, $c^2 = h^2 + (a - x)^2$

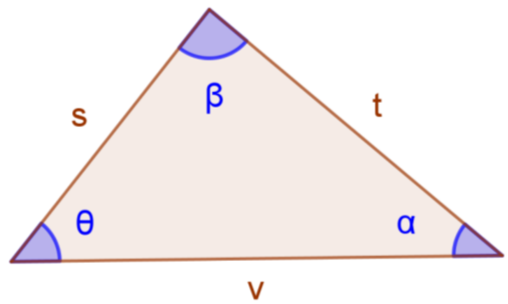
$\therefore\ h^2 = c^2 - (a - x)^2$

Iguala el cuadrado
de las alturas,
simplifica y escribe
la tercera forma de
la ley de cosenos

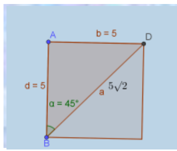
II. Con la ley de los cosenos, conociendo dos lados y el ángulo comprendido podemos obtener el tercer lado. Con base en la figura y los datos proporcionados, obtén el lado que falta.

1. Si $s = 10m,\ t = 6.5m\ y\ \beta = 60°$

   La expresión en donde vas a sustituir es:
   $v^2 = s^2 + t^2 - 2st\ cos\ \beta$



2. Si $s = 15cm, v = 18.6cm\ y\ \theta = 35°$



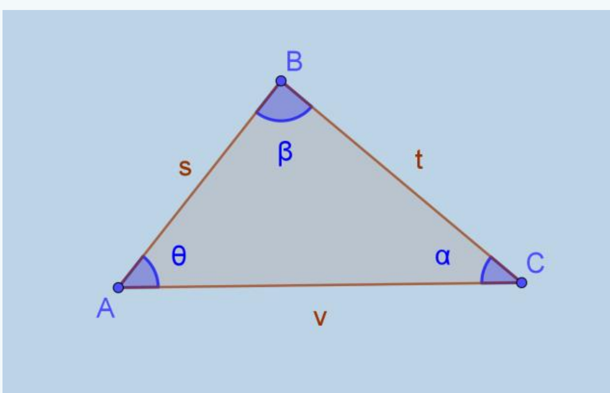
Aplicaciones de las leyes

Ley de senos y ley de cosenos

Actividad de aplicación

La trigonometría ha permitido el avance en el desarrollo de diferentes disciplinas como la ingeniería, la astronomía, la electrónica, la física, medicina entre otras, pues da la posibilidad de hacer cálculos precisos para la construcción de puentes, la distancia entre planetas, la medición de frecuencias cardiacas, por mencionar sólo algunas.

Las razones trigonométricas están definidas para triángulos rectángulos y permiten obtener con un lado y un ángulo agudo, los demás elementos del triángulo, con ayuda de la ley de senos y la de cosenos podemos obtener los elementos del cualquier triángulo, si se conocen tres elementos de la figura, para ello es importante reconocer la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo básicamente se requiere identificar el lado que se opone a cada ángulo, así podemos escribir las leyes trigonométricas mencionadas, sin importar la nomenclatura. Por ejemplo, para escribir la ley de senos basta con escribir la igualdad entre los cocientes de cada uno de los lados entre el seno del ángulo opuesto.



Objetivo

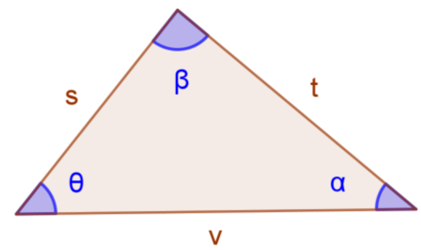
- ✓ Determinar la relación entre los lados y los ángulos en las leyes de senos y cosenos.
- ✓ Identificar cuándo se aplica la ley de senos y cuándo la ley de cosenos.
- ✓ Saber aplicar la ley de cosenos.

Trabajo en parejas.

CONTESTEN

II. Para la siguiente figura:

1. Escriben la ley de senos



2. Escriban en palabras la ley de cosenos.

3. Para obtener el lado s, escriban la ley de los cosenos.

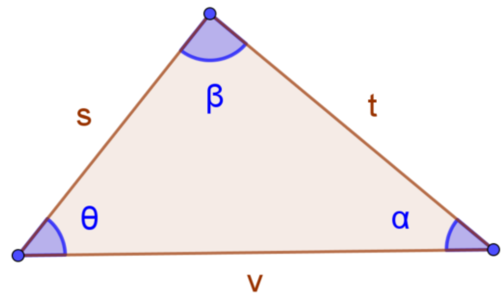
Cabe aclarar que esta ley sirve para obtener el lado, si se conocen el ángulo y los lados que lo comprenden.

4. Escriban la ley de cosenos y despejen el ángulo β

III. Analicen los siguientes ejercicios para elegir cuál de las leyes (de senos o de cosenos) se debe aplicar para obtener la solución y escriban cuál es el criterio de selección.

1. Con respecto al siguiente triángulo, encuentra en el lado que se pide.

a) s= 10m, t=12m, $\theta = 40°$, obtén el lado v.

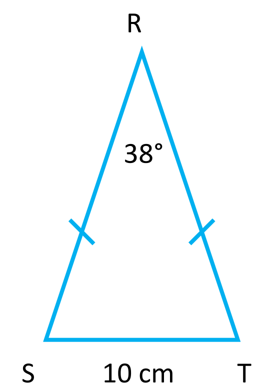


b) $t = 10, v = 30m, \alpha = 35°, obtén\ el\ lado\ s$

c) $s = 12m\ , v = 18m,\ \ \beta = 60°$, obtén el lado t.

2. Las diagonales de un paralelogramo miden 12cm y 16 cm, el ángulo que forman es de 60°. ¿Cuánto miden los lados del cuadrilátero?

3. Hallen el perímetro del ΔRST isósceles. Redondeen a la unidad entera más cercana.



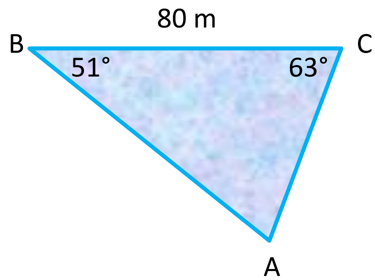
4. Etiqueten con A, B y C los vértices de un campo de forma triangular. Un topógrafo determina que la longitud del lado AB es de 620 m, Con un teodolito hallen que el $\angle A$ es 56.8° y el $\angle B = 60.4°$. Encuentren el perímetro del campo.

5. Como un nuevo atractivo del parque se desea colocar una tirolesa que vaya del poste A al B (vean siguiente ilustración), se necesita saber la distancia que se recorrerá, Para ello se consideró el punto P y se tomaron las siguientes medidas.
   $\overline{PA} = 18.5m$
   $PB = 25m$
   $< P = 114°$
   ¿Cuál es la distancia que hay por encima del estanque?

https://media.er2.co/es/salamanca/541841fb5fad1/635/58a5c16e314ce.jpg

Justifiquen su respuesta.

6. En ΔABC, < B = 51°, < C = 63° y a = 80m.



a) Hallen c.

b) Dibujen la altura de BC desde A.

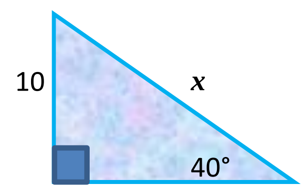
c) Hallen la longitud de la altura h.

d) Calculen el área del triángulo.

Comunicación

1. Utilicen la ley de los senos para explicar porque los lados iguales de un triángulo isósceles se oponen a los ángulos iguales.

2.
   a) Utilicen la ley de senos para encontrar *x*.



   b) Usen la razón seno para calcular *x*.

   c) Expliquen por qué los dos métodos son equivalentes en un Δ rectángulo.

Elementos de trigonometría

Evaluación de la unidad

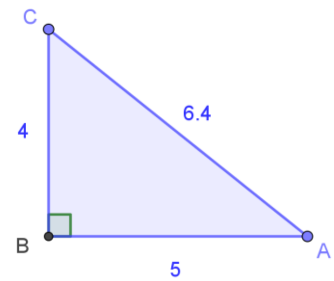
Propuesta de evaluar la unidad de elementos de trigonometría

Para contestar lo que se te pide, en algunas preguntas requerirás de una calculadora.

1. Cuando resuelves problemas de trigonometría, ¿Qué te ayudará siempre a visualizar el problema?	2. ¿En qué tipo de triángulos se aplican las razones trigonométricas primarias?
3. ¿Qué información necesitas tener para resolver un problema con la ley de senos?	4. ¿Cómo usarías la ley de senos para hallar un lado?
5. ¿Bajo qué condiciones no puedes usar la ley de senos para hallar la medida de un lado o un ángulo en un triángulo?	6. ¿Qué información necesitas tener para usar la ley de los cosenos para resolver un problema?
7. Da ejemplo de situaciones en las cuales	8. Usa el triángulo ABC para calcular cada

<table>
<tr>
<td>puedas usar la ley de senos o cosenos para resolver un problema. En esa situaciones, ¿cuál usarías y por qué?</td>
<td>razón trigonométrica.

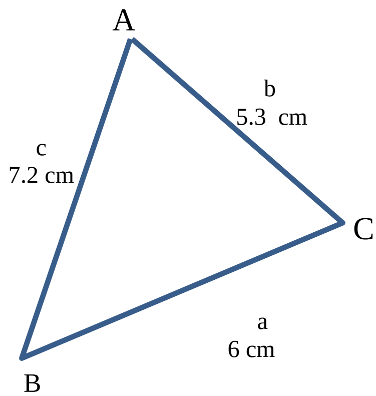
a) tan B



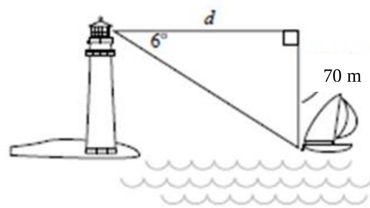
b) cos A</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">9. Usa tu calculadora para hallar cada razón trigonométrica, aproxima hasta cuatro dígitos decimales.

a) sen 24°</td>
<td>b) cos 68°</td>
</tr>
<tr>
<td>c) tan 47°</td>
</tr>
</table>

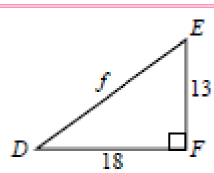
10. En el triángulo ABC, los lados miden: a = 6 cm, b = 5.3 cm y c = 7.2 cm. Halla la medida del ángulo A, redondea al grado más cercano.



11. Desde un faro a 70 metros sobre el nivel del mar, un barco es visualizado en un ángulo de depresión de 6 grados. ¿Qué tan lejos mar adentro está el barco? Redondea tu respuesta al metro más cercano.



12. Usa el triángulo DEF para hallar los valores de:



a) Las tres razones trigonométricas del ángulo D.

b) La medida del ángulo D.

13. Pueblo Grande, latitud 61.3° N, está directamente al norte de Pueblo Chico, latitud 43.8° N. Da la distancia entre ambos poblados. (Pista, el radio de la Tierra es de 6370 Km aprox.).

14. Una compañía de helados, diseña conos para servir helado de yogurt. El diseño del cono tiene en la punta 38° y los lados miden 12 cm de largo. ¿Cuál debe ser el radio de la parte superior del cono?